JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 35, 86–93 (1982)

Asymptotische Approximationseigenschaften der Ableitungen analytischer Funktionen

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Giessen, D-6300 Giessen, West Germany

Communicated by Oved Shisha

Received March 23, 1981

Werden abzählbar vielen, isoliert liegenden Randpunkten z_i ($i = 1, 2, 3,...$) gewisser Gebiete G der komplexen Ebene beliebige komplexe Zahlen $c_{i,n}$ ($n = 0, 1, 2,...; i = 1, 2, 3,...$) zugeordnet, dann gibt es nach einem älteren Satz von Franklin [2] eine in G analytische Funktion f mit

$$\lim_{z \to z_i} f^{(n)}(z) = c_{i,n} \qquad (n = 0, 1, 2,...; i = 1, 2, 3,...),$$

wobei die Annäherung $z \to z_i$ beliebig innerhalb G verläuft.

Mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln wurden in [6] und [7] Verallgemeinerungen dieses Satzes hergeleitet und verschiedene verwandte Probleme untersucht.

Ohne die Voraussetzung der Isoliertheit der Randpunkte z_i zeigte der Verfasser in [5] speziell für den Einheitskreis

SATZ 1. *Den abzählbar vielen verschiedenen Punkten z_i, $|z_i| = 1$ ($i = 1, 2, 3,...$) seien beliebige komplexe Zahlen $c_{i,n}$ ($n = 0, 1, 2,...$) zugeordnet. Dann gibt es eine für $|z| < 1$ analytische Funktion f so, daß*

$$\lim_{z \to z_i} f^{(n)}(z) = c_{i,n} \qquad (n = 0, 1, 2,...; i = 1, 2, 3,...)$$

ist bei radialer Annäherung $z \to z_i$ entlang der durch $0 \leqslant z/z_i < 1$ gegebenen Radialstrahlen.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß aus Ergebnissen des Verfassers in [3] und [4] über die asymptotische Approximation differenzierbarer Funktionen durch ganze Funktionen wesentliche Verschärfungen von Satz 1 bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit von $f^{(n)}(z)$ ($z \to z_i$) gewonnen werden können. Dabei läßt sich nach Vorgabe von beliebigen, auf den Radialstrahlen unendlich oft differenzierbaren Funktionen u_i ($i = 1, 2, 3,...$) stets eine im Einheitskreis analytische Funktion finden, deren Ableitungen

0021-9045/82/050086-08$02.00/0

alle die entsprechenden Ableitungen von u_i bei radialer Annäherung an die Randpunkte z_i beliebig gut asymptotisch approximieren.

Zu einer komplexen Zahl $z_i \neq 0$ bezeichne dazu $C^\infty[0, z_i)$ die Klasse aller auf dem halboffenen Geradenstück $0 \leqslant z/z_i < 1$ komplexwertigen Funktionen, die in allen z dieses Geradenstückes beliebig oft differenzierbar sind, wobei hier Differenzierbarkeit nur entlang dieses Geradenstückes definiert wird.

C^∞ sei die Klasse aller auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ $(-\infty < x < \infty)$ komplexwertigen und beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Wir beweisen

SATZ 2. *Den abzählbar vielen verschiedenen Punkten z_i mit $|z_i| = 1$ $(i = 1, 2, 3,...)$ seien beliebige Funktionen $u_i \in C^\infty[0, z_i)$ zugeordnet. Dann gibt es zu jeder auf $[0, 1)$ positiven, stetigen Funktion h eine für $|z| < 1$ analytische Funktion f so, daß*

$$f^{(n)}(z) = u_i^{(n)}(z) + O(h(r)) \tag{1}$$

ist bei radialer Annäherung $0 \leqslant r = z/z_i \to 1 - 0$ für alle $n = 0, 1, 2,...$ und alle $i = 1, 2, 3,...$.

Aus Satz 2 ergibt sich wieder Satz 1 als einfacher Spezialfall, wenn man bezüglich der Funktionen u_i beachtet, daß nach einem älteren, auf Borel zurückgehenden Ergebnis stets zu beliebigen komplexen Zahlen c_n eine Funktion $f \in C^\infty$ mit $f^{(n)}(1) = c_n$ $(n = 0, 1, 2,...)$ existiert. Ein neuerer Beweis hierzu findet sich z.B. in [1, S. 228].

Als Hilfsmittel zum Beweis von Satz 2 übernehmen wir aus [3]

SATZ 3. *Zu jeder Funktion $u \in C^\infty$, zu jeder auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ positiven, stetigen Funktion h und zu jeder Folge reeller Zahlen c_n mit $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,...)$ und $c_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ gibt es eine in der ganzen komplexen z-Ebene $(z = x + iy)$ analytische Funktion g mit*

$$|u^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x) \qquad (|x| \geqslant c_n;\ n = 0, 1, 2,...).$$

Ist hierbei u positiv auf $\mathbb{R}$, so kann auch g auf $\mathbb{R}$ positiv gewählt werden.

Man erhält aus diesem Satz bei Beachtung des Beweisganges in [3] sehr leicht

LEMMA (a). *Zu jedem $u \in C^\infty$ und zu jeder positiven, stetigen Funktion h auf $\mathbb{R}$ sowie zu jedem $r > 0$, $\varepsilon > 0$ und jeder natürlichen Zahl m gibt es eine ganze Funktion g mit*

$$g^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + O(h(x)) \qquad (|x| \to \infty;\ n = 0, 1, 2,...) \tag{2}$$

und

$$|g^{(l)}(z)| < \varepsilon \qquad (|z| \leqslant r,\ 0 \leqslant l \leqslant m). \tag{3}$$

Ferner benutzen wir

LEMMA (b). *Es sei $q > 0$. Dann gibt es zu jeder auf $\mathbb{R}$ positiven, stetigen Funktion h eine ganze, auf $\mathbb{R}$ positive Funktion b mit*

$$\frac{b^{(n)}(x)}{[b(x)]^{1+q}} = O(h(x)) \qquad (|x| \to \infty;\ n = 0, 1, 2,...). \tag{4.}$$

Lemma (b) kann sehr leicht aus Satz 3 hergeleitet werden. Denn nach dem Beweisgang zu einem Hilfssatz aus [4, Lemma (c), S. 119] existiert zu jeder positiven, stetigen Funktion h auf $\mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}$ positive Funktion $u \in C^{\infty}$ mit

$$\frac{u^{(n)}(x)}{[u(x)]^{1+q}} = O(h(x)) \qquad (|x| \to \infty;\ n = 0, 1, 2...). \tag{5}$$

Nach Satz 3 können wir dann eine ganze, auf $\mathbb{R}$ positive Funktion b wählen, deren Ableitungen alle entsprechenden Ableitungen von u so gut für $|x| \to \infty$ approximieren, daß aus (5) auch die Eigenschaft (4) folgt.

Beweis zu Satz 2. Wir bilden für $j = 1, 2, 3,...$ die Funktionen W_j mit

$$W_j(z) = k_j \left(\frac{1}{1 - z/z_j}\right) \exp\left[-\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu b\left(\frac{1}{1 - z/z_\nu}\right)\right] \tag{6}$$

und setzen

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(z). \tag{7}$$

Dabei bezeichnet "exp" die Exponentialfunktion, und im folgenden wird gezeigt, daß sich positive Konstanten q_ν sowie ganze Funktionen b und k_j $(j = 1, 2, 3,...)$ in (6) so wählen lassen, daß die Reihen (6) und (7) in jeder kompakten Teilmenge des Einheitskreises absolut und gleichmäßig konvergieren, und daß ferner die somit für $|z| < 1$ analytische Funktion f die geforderte Eigenschaft (1) besitzt.

Zunächst bestimmen wir nach Lemma (b) zu der auf $[0, 1)$ positiven, stetigen Funktion h eine ganze, auf $\mathbb{R}$ positive Funktion b mit

$$\frac{b^{(n)}(x)}{[b(x)]^2} = O\left(h\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) \qquad (|x| \to \infty;\ n = 0, 1, 2,...), \tag{8}$$

wobei wir offensichtlich noch

$$b(x) \cdot \exp[-|x|] \to \infty (|x| \to \infty) \tag{9}$$

fordern dürfen. Die positiven Zahlen q_ν werden nun einerseits so klein gewählt, daß gilt

$$q_\nu \left| b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right) \right| < 2^{-\nu} \qquad \left(|z| < 1 - \frac{1}{\nu};\ \nu = 1, 2, 3, \ldots\right). \tag{10}$$

Zur weiteren Festlegung der q_ν bilden wir die Konstanten

$$c_{n,i,\nu} = \max_{0 \leqslant z/z_i \leqslant 1} \left| \left[b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right) \right]^{(n)} \right|$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, 3, \ldots;\ \nu \neq i). \tag{11}$$

Es läßt sich dann leicht zeigen, daß sich die q_ν noch zusätzlich zu (10) mit der Eigenschaft

$$q_\nu \cdot c_{n,i,\nu} = O(2^{-\nu}) \qquad (\nu \to \infty;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

bestimmen lassen. Denn bildet man zu obigen n, i, ν positive Zahlen $d_{n,i,\nu}$ mit $d_{n,i,\nu} \cdot c_{n,i,\nu} < 2^{-\nu}$, wobei außerdem $d_{n,i+1,\nu} \leqslant d_{n,i,\nu}$ sowie $d_{n+1,i,\nu} \leqslant d_{n,i,\nu}$ gelte, dann lassen sich offensichtlich hinreichend kleine positive Zahlen $q_\nu < d_{\nu,\nu,\nu+1}$ wählen, die (10) und (12) erfüllen.

Zur Bestimmung der ganzen Funktionen k_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ bilden wir zunächst die positiven Konstanten

$$a_{i,j} = \max_{0 \leqslant z/z_i \leqslant 1} \left| \frac{1}{1 - z/z_j} \right| \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots; j \neq i) \tag{13}$$

und wählen (durch entsprechende Diagonalauswahl wie bei den q_ν) positive Zahlen B_j mit

$$B_j > 1, \quad B_j \to \infty\ (j \to \infty), \quad B_j/a_{i,j} \to \infty\ (j \to \infty;\ i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{14}$$

Die durch

$$\varphi_j(z) = \exp\left[-\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right) \right]$$

gegebenen Funktionen φ_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ sind nach (10) für $|z| < 1$ analytisch. Zu den Funktionen $u_j \in C^\infty[0, z_j)$ bilden wir die auf $[1, \infty)$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen v_j mit

$$v_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right) = \frac{u_j(z)}{\varphi_j(z)} \qquad \left(0 \leqslant \frac{z}{z_j} < 1; j = 1, 2, 3, \ldots\right).$$

Für beliebige ganze Funktionen k_j folgt dann

$$\left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\varphi_j(z)\right]^{(n)} - u_j^{(n)}(z)$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \left\{\left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)} - \left[v_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)}\right\} \varphi_j^{(n-l)}(z)$$
$$(0 \leqslant z/z_j < 1;\ n = 0, 1, 2,\ldots;\ j = 1, 2, 3,\ldots). \qquad (15)$$

Zu jedem $j = 1, 2, 3,\ldots$ läßt sich, wie man leicht zeigt, eine positive, stetige Funktion ε_j auf $\mathbb{R}$ bestimmen mit

$$\varepsilon_j[1/(1-r)]\,\varphi_j^{(l)}(z) = O(h(r)) \quad (0 \leqslant r = z/z_j \to 1-0;\ l = 0, 1, 2,\ldots). \qquad (16)$$

Nach Lemma (a), (2) wählen wir nun die ganzen Funktionen k_j einerseits so, daß

$$\left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)} - \left[v_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)} = O\left(\varepsilon_j\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$$
$$(0 \leqslant r = z/z_j \to 1-0;\ l = 0, 1, 2,\ldots;\ j = 1, 2, 3,\ldots). \qquad (17)$$

Somit folgt aus (6), (15), (16) und (17)

$$W_j^{(n)}(z) = \left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\varphi_j(z)\right]^{(n)} = u_j^{(n)}(z) + O(h(r))$$
$$(0 \leqslant r = z/z_j \to 1-0;\ n = 0, 1, 2,\ldots;\ j = 1, 2, 3,\ldots). \qquad (18)$$

Die ganzen Funktionen k_j können dabei nach Lemma (a), (3) noch zusätzlich zu (17) bestimmt werden mit

$$\left|\left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)}\right|,\ |W_j^{(l)}(z)| < 2^{-j}$$
$$\left(|z| < 1 \text{ und } \left|\frac{1}{1-z/z_j}\right| \leqslant B_j;\ 0 \leqslant l \leqslant j;\ j = 1, 2, 3,\ldots\right). \qquad (19)$$

Insbesondere ist dann

$$|W_j(z)| < 2^{-j} \qquad (|z| < 1-(1/B_j);\ j = 1, 2, 3,\ldots),$$

so daß die Funktion f nach (7) für $|z| < 1$ analytisch ist.

Aus (6) und (7) erhalten wir daher bei radialer Annäherung $0 \leqslant r = z/z_i \to 1-0$ für ein festgehaltenes i nach (18)

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(z) &= W_i^{(n)}(z) + \Bigg[\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j\neq i}} W_j(z)\Bigg]^{(n)} \\
&\doteq \left[k_i\left(\frac{1}{1-z/z_i}\right)\varphi_i(z)\right]^{(n)} \\
&\quad + \left\{\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j\neq i}} k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\exp\left[-\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right)\right]\right\}^{(n)} \\
&= u_i^{(n)}(z) + O(h(r)) \\
&\quad + \left\{\exp\left[-q_i b\left(\frac{1}{1-z/z_i}\right)\right]\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j\neq i}} k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right. \\
&\quad \left.\times \exp\left[-\sum_{\substack{\nu\geqslant 1\\ \nu\neq i}} q_\nu b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right)\right]\right\}^{(n)} \\
&= u_i^{(n)}(z) + O(h(r)) + S(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Zum Beweis von Satz 2, (1) ist somit lediglich noch $S(z) = O(h(r))$ $(0 \leqslant r = z/z_i \to 1-0)$ zu zeigen. Beim gliedweisen Ausdifferenzieren und Abschätzen der Summanden von $S(z)$ in (20) ergibt sich einerseits, daß alle Reihen der Gestalt

$$
\sum_{\substack{\nu\geqslant 1\\ \nu\neq i}} q_\nu \left|\left[b\left(\frac{1}{1-z/z_\nu}\right)\right]^{(l)}\right| \qquad (0 \leqslant l \leqslant n)
$$

nach (11) durch $\sum_{\nu\geqslant 1, \nu\neq i} q_\nu c_{l,i,\nu}$ majorisiert werden und daher wegen (12) für $0 \leqslant r = z/z_i \to 1-0$ beschränkt bleiben.

Wählen wir ferner eine natürliche Zahl $N_i \geqslant n$ so groß, daß für die Konstanten $a_{i,j}$ aus (13) bei Beachtung von (14) $a_{i,j} < B_j$ $(j \geqslant N_i)$ ist, dann erhalten wir für alle bei der Abschätzung von $S(z)$ auftretenden Reihen der Form

$$
T_l(z) = \sum_{\substack{j\geqslant 1\\ j\neq i}} \left|\left[k_j\left(\frac{1}{1-z/z_j}\right)\right]^{(l)}\right| \qquad (0 \leqslant l \leqslant n)
$$

bei Beachtung von (19)

$$0 \leqslant T_l \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant N_i \\ j \neq i}} \left| \left[k_j \left(\frac{1}{1 - z/z_j} \right) \right]^{(l)} \right| + \sum_{j > N_i} 2^{-j}$$
$$(0 \leqslant z/z_i < 1;\ 0 \leqslant l \leqslant n),$$

so daß die Terme $T_l(z)$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$ bei der radialen Annäherung an z_i ebenfalls beschränkt bleiben. Somit muß zum Beweis von $S(z) = O(h(r))$ $(0 \leqslant r = z/z_i \to 1 - 0)$ schließlich nach (20) nur noch

$$E_l(z) = \left\{ \exp \left[-q_i b \left(\frac{1}{1 - z/z_i} \right) \right] \right\}^{(l)} = O(h(r))$$
$$(0 \leqslant r = z/z_i \to 1 - 0;\ 0 \leqslant l \leqslant n) \quad (21)$$

gezeigt werden. Da $E_l(z)$ aber bis auf konstante Faktoren eine endliche Summe von Termen der Gestalt

$$A(r) = \frac{1}{(1 - r)^k} b^{(m)} \left(\frac{1}{1 - r} \right) \exp \left[-q_i b \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right] \quad (22)$$

mit ganzen Zahlen $k, m \geqslant 0$ ist, so erhalten wir für $x = 1/(1 - r)$ aus (8) bei Beachtung von $\exp[|x|]/[b(x)] \to 0$ $(|x| \to \infty)$ nach (9) daher aus (22)

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{1}{(1 - r)^k} \left[b \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right]^2 \cdot \exp \left[-q_i b \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right] O(h(r)) \\ &= \frac{\exp[-1/1 - r]}{(1 - r)^k} \left[b \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right]^3 \cdot \exp \left[-q_i b \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right] O(h(r)) \\ &= O(h(r)) \qquad (r \to 1 - 0), \end{aligned}$$

woraus sich (21) ergibt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Literatur

1. E. Berz, Operatoren verallgemeinerter Funktionen, *Math. Ann.* **158** (1965), 215–232.
2. Ph. Franklin, Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag–Leffler's theorem, *Acta Math.* **47** (1926), 371–385.
3. L. Hoischen, Eine Verschärfung eines Approximationssatzes von Carleman, *J. Approx. Theory* **9** (1973), 272–277.
4. L. Hoischen, Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen, *J. Approx. Theory* **15** (1975), 116–123.

5. L. HOISCHEN UND E. MOGK, Interpolationseigenschaften der Ableitungen von Potenzreihen bei Annäherung an den Konvergenzkreis, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972), 327–334.
6. F. PITTNAUER, Bestimmung holomorpher Funktionen aus linearen Beziehungen für Randableitungen, *Math. Z.* **106** (1968), 183–186.
7. F. PITTNAUER UND K. ZELLER, Analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Grenzableitungen, *Studia Math.* **31** (1968), 153–158.